GEOMETRIA PLANA

INTRODUÇÃO

A Geometria está apoiada sobre alguns postulados, axiomas, definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema. Alguns desses objetos são aceitos sem demonstração, isto é, você deve aceitar tais conceitos porque os mesmos parecem funcionar na prática!

A Geometria permite que façamos uso dos conceitos elementares para construir outros objetos mais complexos como: pontos especiais, retas especiais, planos dos mais variados tipos, ângulos, médias, centros de gravidade de objetos, etc.

I - NOÇÕES E PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS DE GEOMETRIA

I.1- Noções primitivas

1. As noções geométricas são estabelecidas por meio de definição. As noções primitivas são adotadas sem definição. Adotaremos sem definir as noções de:

PONTO, RETA E PLANO.

2. Notação de ponto, reta e plano

Os **conceitos primitivos** da Geometria Euclidiana são:

1. Reta
2. Ponto
3. Plano

Reta é a figura geométrica constituída por uma linha que estabelece a menor distância entre duas posições.

Características:

- a reta só possui uma dimensão, comprimento.
- a reta é ilimitada, não possui início e fim

Ponto é a figura geométrica formada pelo encontro de duas retas.

Característica:

- o ponto não possui dimensões

Plano é a figura geométrica definida por duas retas concorrentes.

Características:

- o plano possui duas dimensões.
- o plano é ilimitado

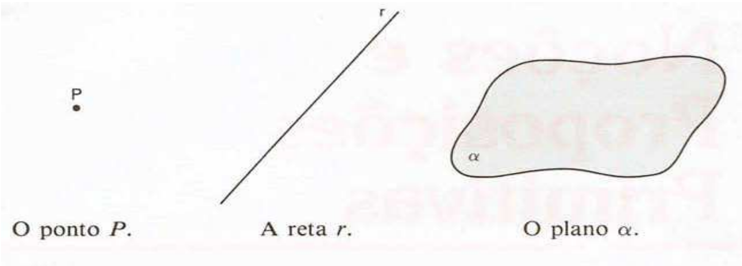
a) Com letras

Ponto - letras maiúsculas latinas: A, B, C.

Reta - letras minúsculas latinas: a, b, c.

Plano - letras gregas minúsculas:α,β,γ.

b) Notações gráficas



I.2- Proposições primitivas

1. As proposições (propriedades, afirmações) geométricas são aceitas mediante demonstrações.

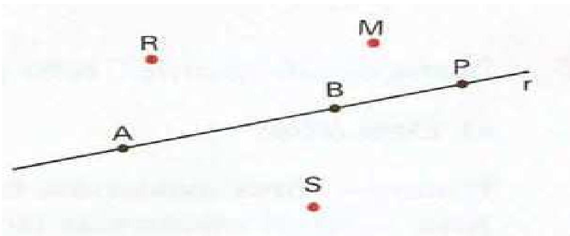
2. Postulado da existência

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

b) Num plano há infinitos pontos.

A expressão "infinitos pontos" tem o significado de "tantos pontos quantos quisermos".

A figura abaixo indica uma reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, sendo que A, B e P estão em r ou a reta r passa por A, B e P.



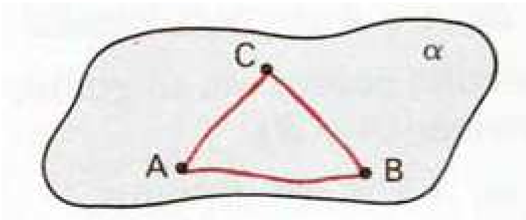
3. Postulados de determinação:

a) da reta.

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

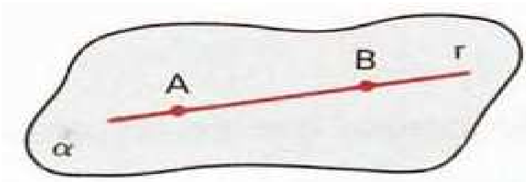
b) do plano.

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.



4. Postulado da inclusão.

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.



5. Pontos co-planares são pontos que pertencem a um mesmo plano.

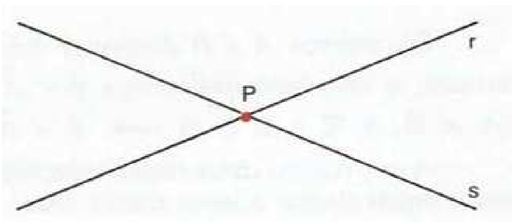
Figura é qualquer conjunto de pontos.

Figura plana é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano.

A Geometria Plana estuda as figuras planas.

6. Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.



EXERCÍCIOS:

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Por um ponto passam infinitas retas.

b) Por dois pontos distintos passa uma reta.

c) Uma reta contém dois pontos distintos.

d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.

e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Três pontos distintos são sempre colineares.

b) Três pontos distintos são sempre coplanares.

c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.

d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.

e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a tal que AЄQ e BЄQ.

b) Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s, se P e distinto de Q, e P e Q pertencem às retas r e s, então r = s.

c) Qualquer que seja uma reta r, existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B, com A Є r e B Є r.

d) Se A = B, existe uma reta r tal que A, B Є r.

4. Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

5. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas que tem um ponto comum são concorrentes.

b) Duas retas concorrentes tem um ponto comum.

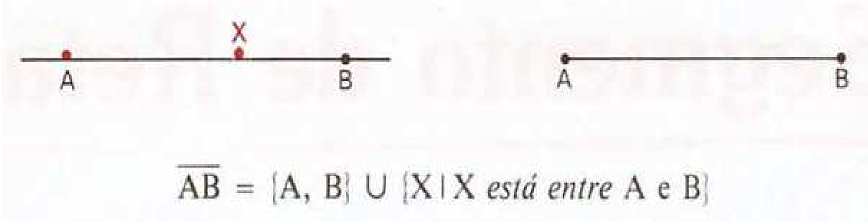
c) Se duas retas distintas tem um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

CAPÍTULO II - SEGMENTO DE RETA

II.1- Definição:

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

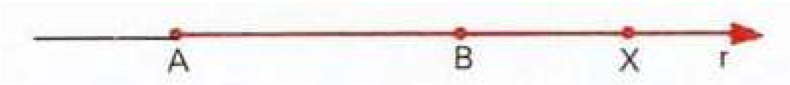
Assim, dados A e B, A ≠ B, a segmento de reta AB (indicado por AB) é o que segue:



II.2- Semi-reta:

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B esta entre A e X e a semi-reta AB (indicada por AB).

O ponto A é a origem da semi-reta AB:



A) Congruência de segmentos

A congruência (símbolo: ≡) de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

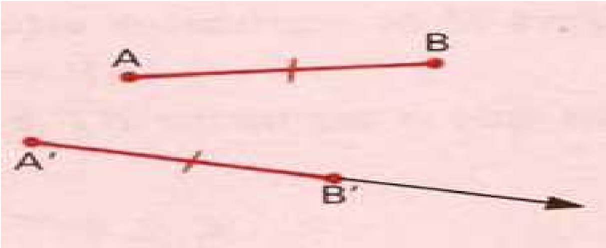
1) Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo: AB ≡ AB.

2) Simétrica. Se AB ≡ CD, então CD ≡ AB.

3) Transitiva: Se AB ≡ CD e CD ≡ EF, então AB ≡ EF.

4) Postulado do transporte de segmentos:

Dados um segmento AB e uma semi-reta de origem A', existe sobre esta semi-reta um único ponto B' tal que A'B' seja congruente a AB.



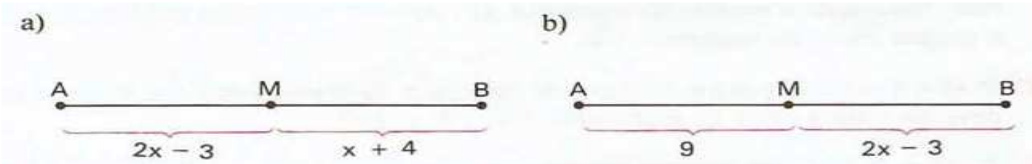
B) Ponto Médio de um segmento

Um ponto M é ponto médio do segmento AB se, e somente se, M está entre A e B e AM ≡ MB.

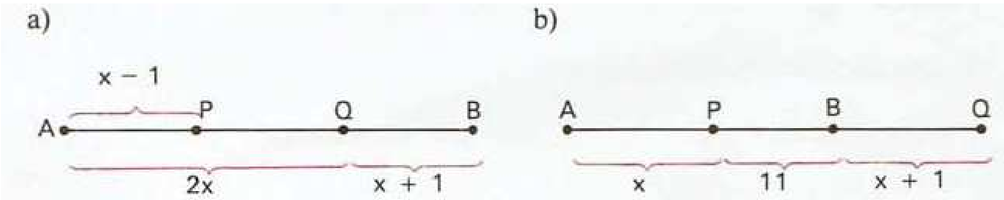
M Є AB e MA ≡ MB

EXERCÍCIOS:

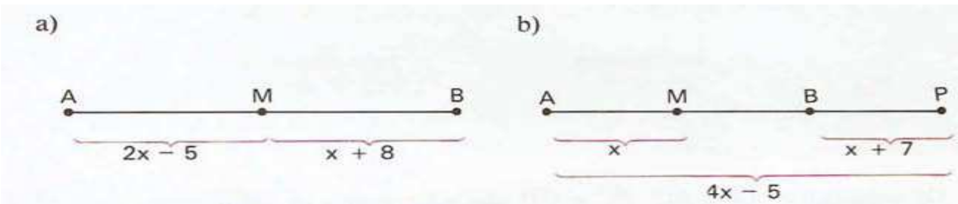
1. Determine x, sendo M ponto médio de AB:



2. Determine PQ, sendo AB = 31:



3**.** Determine AB, sendo M ponto médio de AB**:**

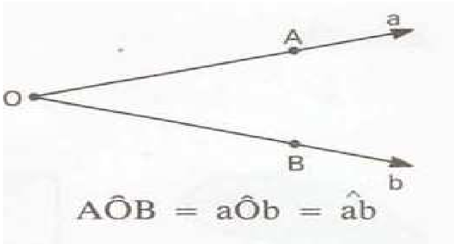


4. O segmento AB de uma reta é igual ao quíntuplo do segmento CD dessa mesma reta. Determine a medida do segmento AB, considerando como unidade de medida a quinta parte do segmento CD.

CAPÍTULO III - ÂNGULOS

III.1-Definições

Chama-se ângulo a reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares). É o espaço compreendido entre duas semi-retas de mesma origem, ou seja, que iniciam no mesmo ponto.



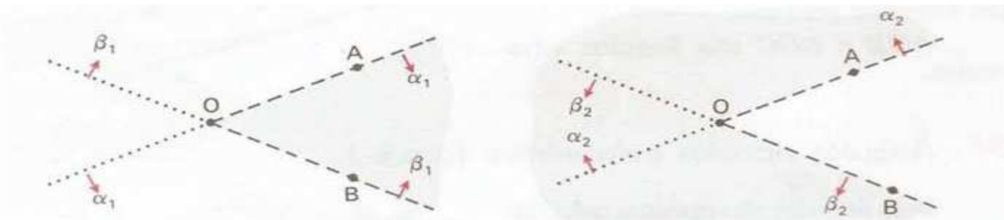
O ponto O é o vértice do angulo. As semi-retas OA e OB são os lados do ângulo.

III.2- Interior do ângulo

Interior do ângulo AÔB é a interseção de dois semi-planos abertos, α1 com origem na reta OA e que contem o ponto B e β1 com origem em OB e que contem o ponto A.

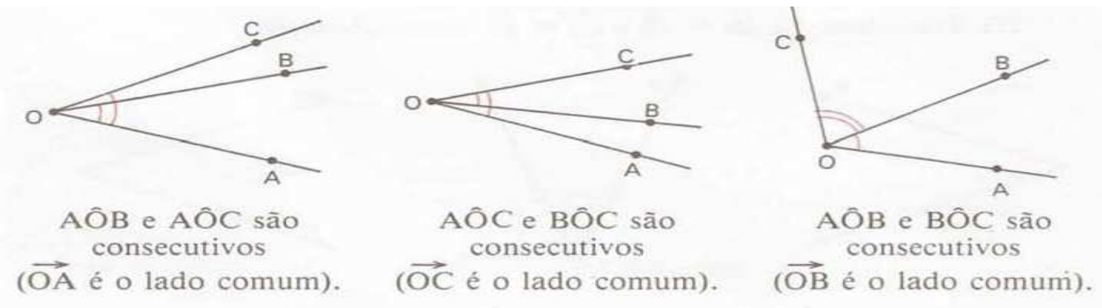
O interior de um ângulo é convexo e os pontos desse interior são pontos internos ao ângulo.

A reunião de um ângulo com seu interior é um setor angular ou ângulo completo e também é conhecido por "angulo convexo".



III.3- Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um lado do outro).

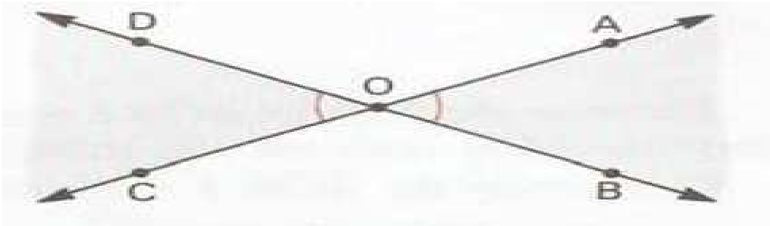


III.4- Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.

OA e OC são opostas, idem OB e OD =>AÔB e CÔD são opostos pelo vértice.

Notemos que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.



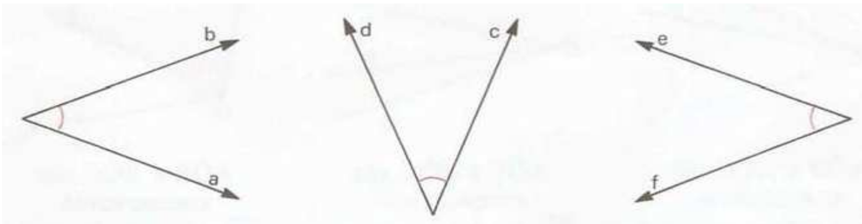
III.5- Congruência e comparação

A congruência (símbolo ≡) entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

1º) Reflexiva. Todo ângulo é congruente a si mesmo: a^b ≡ a^b.

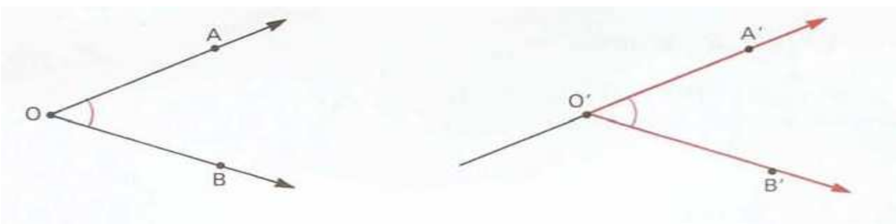
2º) Simétrica. Se a^b ≡ c^d, então c^d ≡ a^b.

3º) Transitiva. Se a^b ≡ c^d e c^d ≡ e^f, então a^b ≡ e^f.

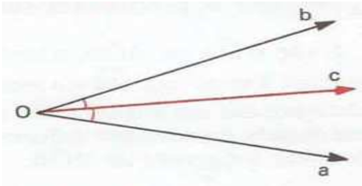


4º) Postulado do transporte de ângulos.

Dados um ângulo AÔB e uma semi-reta O'A' de um plano, existe sobre este plano, e num dos semi-planos que 0'A' permite determinar, uma única semi-reta O'B' que forma com 0'A' um ângulo A'Ô'B' congruente ao ângulo AÔB.



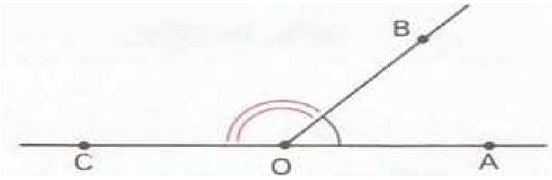
III.6- Bissetriz de um ângulo



A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

III.7- Ângulos suplementares adjacentes

Dado o ângulo AÔB, a semi-reta OC oposta a semi-reta OA e a semi-reta OB determinam um ângulo BÔC que se chama ângulo suplementar adjacente ou suplemento adjacente de AÔB.

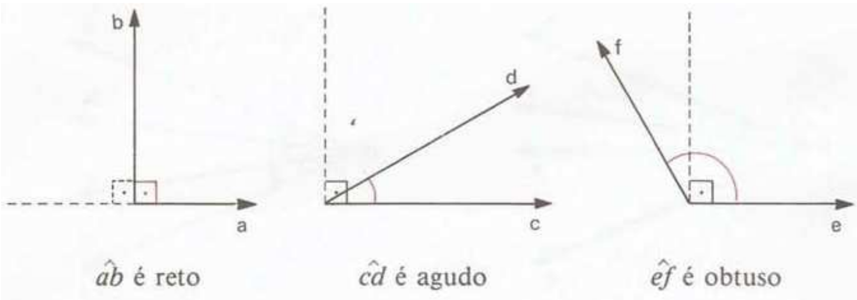


III.8- Ângulos: reto, agudo, obtuso.

Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

Ângulo obtuso e um ângulo maior que um ângulo reto.



III.9- Medida de um ângulo - amplitude

A medida de um ângulo AÔB será indicada por m(AÔB).

A medida de um ângulo é um número real positivo associado ao ângulo de forma tal que:

1º) Ângulos congruentes tem medidas iguais e, reciprocamente, ângulos que tem medidas iguais são congruentes.

2º) Se um ângulo é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

3º) A um ângulo soma está associada uma medida que é a soma das medidas dos ângulos parcelas.

r^t ≡ a^b + c^d = m(r^t) = m(a^b) + m(c^d)

À medida de um ângulo dá-se o nome de amplitude do ângulo.

Em geral, associa-se um número a um ângulo estabelecendo a razão (quociente) entre este ângulo e outro tomado como unidade.

III.10- Unidades de medida de ângulos

Ângulo de um grau (lº) é o ângulo submúltiplo segundo 90 (noventa) de um ângulo reto.

Ângulo de um grau = ângulo reto / 90, logo um ângulo reto tem 90 graus (90°).

A medida de um ângulo agudo é menor que 90º, enquanto que A medida de um ângulo obtuso é maior que 90º.

A medida α de um ângulo é tal que, $0° < \alpha < 180°$

Ângulo de um minuto (l') é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um grau. l' = 1º/ 60, portanto um grau tem 60 minutos (60').

Ângulo de um segundo (l'') é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um minuto. 1'' = 1'/ 60, logo um minuto tem 60 segundos (60'').

Ângulo de um grado (1gr) é o ângulo submúltiplo segundo 100 (cem) de um ângulo reto, portanto o ângulo de um grado = angulo reto/ 100

III.11- Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 90°. Um deles é o complemento do outro.

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°. Um deles e o suplemento do outro.

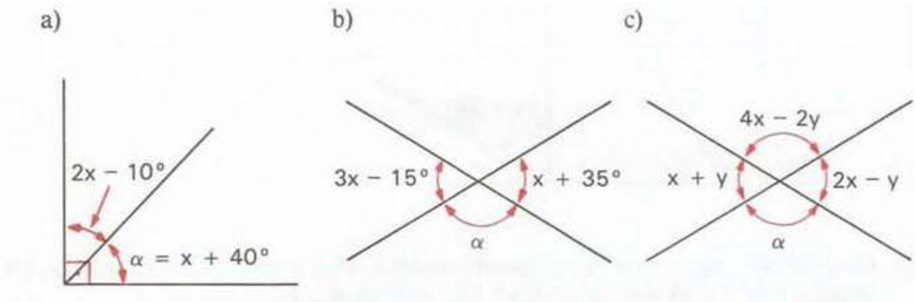
III.12- Ângulo nulo e ângulo raso

Pode-se estender o conceito de ângulo para se ter o ângulo nulo (cujos lados são coincidentes) ou o ângulo raso (cujos lados são semi-retas opostas).

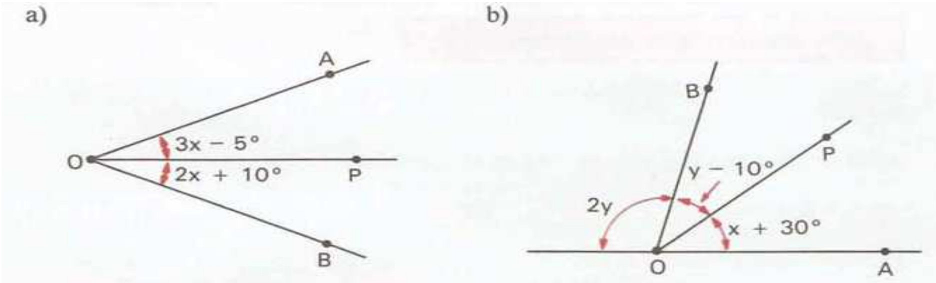
Então, a medida α de um ângulo é tal que, $0° \leq a \leq 180°$.

EXERCÍCIOS:

1. Determine o valor de α nos casos:



2. Se OP e bissetriz de AÔB, determine x nos casos:



3. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares formam um ângulo de 45°.

4. Dois ângulos adjacentes somam 136°. Qual a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

5. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 52°. Se um deles mede 40°, qual e a medida do outro?

CAPÍTULO IV- TRIÂNGULOS

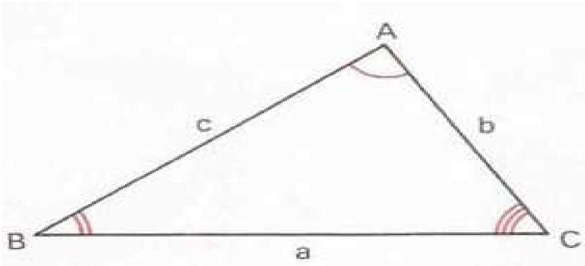
Conceito – elementos – classificação

Os triângulos são polígonos de três lados. Iremos classificar os triângulos de duas maneiras: quanto aos lados e quanto aos ângulos.

IV.1- Definição

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC.

Indicação: Triângulo ABC = ΔABC, ΔABC = AB U AC U BC



IV.2- Elementos

Vértices: os pontos A, B e C são os vértices do ΔABC.

Lados: os segmentos AB (de medida c), AC (de medida b) e BC (de medida a) são os lados do triângulo.

Ângulos: os ângulos BÂC ou Â, A^BC ou ^B e A^CB ou ^C são os ângulos do ΔABC (ou ângulos internos do ΔABC).

Diz-se que os lados BC, AC e AB e os ângulos ^A, ^B e ^C são, respectivamente, opostos.

IV.3- Interior e exterior

Dado um triangulo ABC, vamos considerar os semiplanos abertos, a saber:

α1 com origem na reta BC e que contem o ponto A,

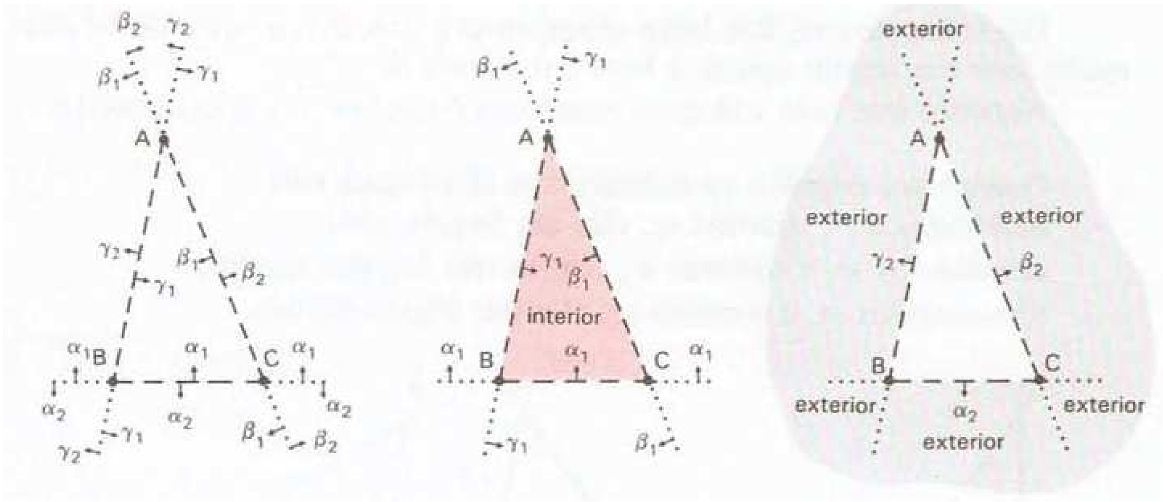
α2 oposto a α1,

β1 com origem na reta AC e que contem o ponto B,

β2 oposto a β1,

γ1 com origem na reta AB e que contem o ponto C,

γ2 oposto a γ1.



Interior do ΔABC = α1 ∩ β1 ∩ γ1

O interior de um triângulo é uma região convexa.

Os pontos do interior do ΔABC são pontos internos ao ΔABC.

Exterior do ΔABC = α2 U β2 U γ2

O exterior de um triângulo é uma região côncava. Os pontos do exterior do ΔABC são pontos externos ao ΔABC.

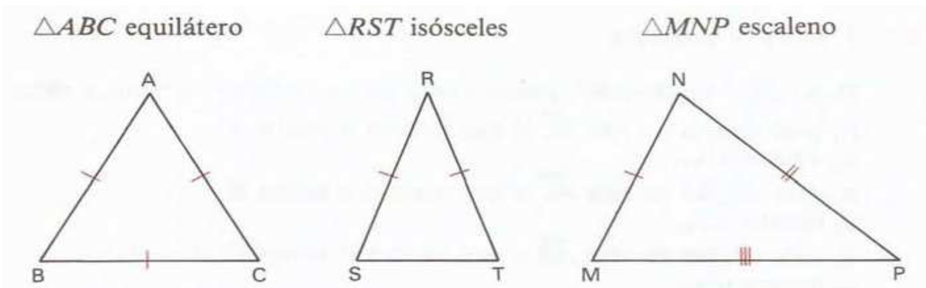
IV.4- Classificação

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

Equiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;

Isósceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;

Escalenos se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

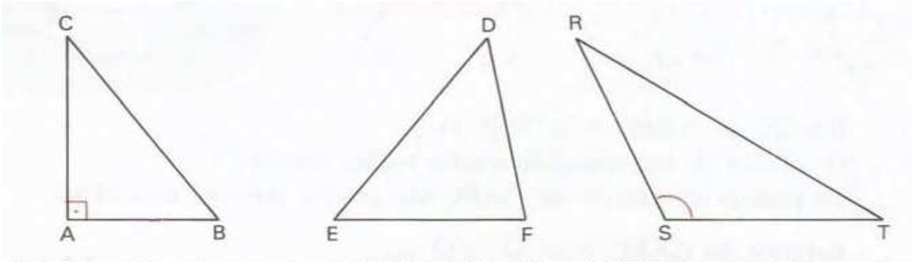


Quanto aos ângulos, os triângulos se c1assificam em:

Retângulos se, e somente se, têm um ângulo reto; = 90°

Acutângulos se, e somente se, têm os três ângulos agudos; < 90°

Obtusângulos se, e somente se, têm um ângulo obtuso. > 90°



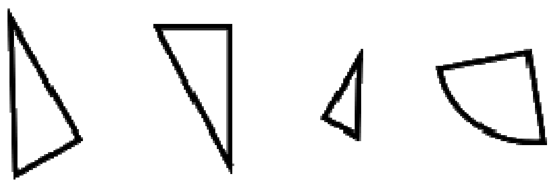
$\triangle ABC$ retângulo em A $\triangle DEF$ acutângulo $\triangle RST$ obtusângulo em S

O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua hipotenusa e os outros dois são os catetos do triângulo.

IV.5- Definição de Congruência de Triângulos

A **congruência** é um conceito geométrico. Na geometria, duas figuras são congruentes se elas possuem a mesma forma e tamanho. Mais formalmente, dois conjuntos de pontos geométricos são ditos "congruentes" se, e somente se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões. O conceito associado de similaridade admite uma mudança no tamanho entre duas figuras similares.

Um exemplo de congruência. As duas figuras à esquerda são congruentes, enquanto que a Terceira é simimar a elas. A última figura não é congruente nem similar às anteriores. Note que a congruência altera algumas propriedades, tais como localização e orientação, mas mantém outras sem modificação, como a distância entre pontos e os ângulos. As propriedades não modificadas são chamadas invariantes.



Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

• Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e

• Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

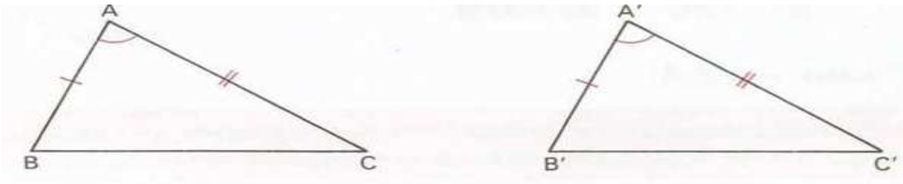
IV.6- Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados casos ou critérios de congruência.

1º Caso - LAL - postulado

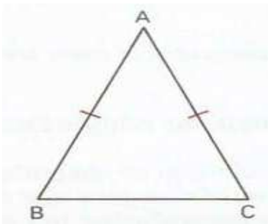
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição e um postulado e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante, e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.



IV.7- Teorema do triângulo isósceles

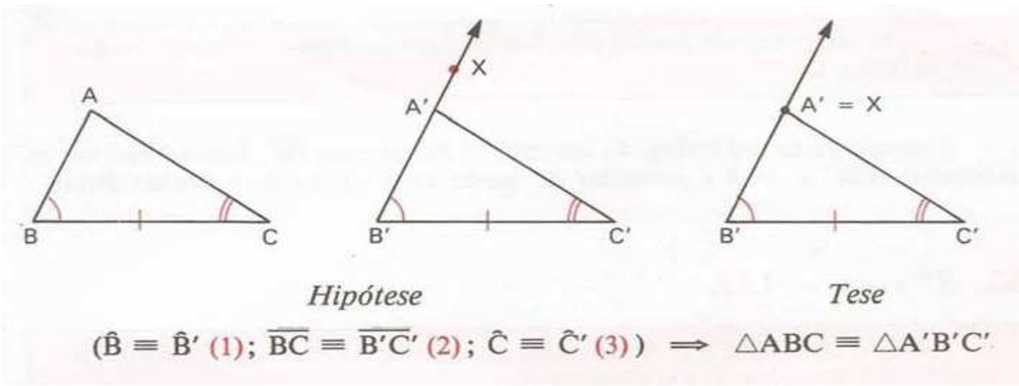
"Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes. “Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes."



IV.8- 2º caso – ALA

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

Os ângulos adjacentes ao lado BC são ^B e ^C; os adjacentes ao lado B'C' são ^B' e ^C'.



Demonstração

Vamos provar que BA ≡ B'A', pois com isso recairemos no 1º caso.

Pelo postulado do transporte de segmentos, obtemos na semi-reta B'A' um ponto X tal que B'X ≡ BA. (4)

(2) BC ≡ B'C'

(1) ^B ≡ ^B'

(4) BA ≡ B'X

→ ΔABC ≡ ΔXB'C' → B^CA Δ B'^C'X (5)

Da hipótese (3) B^CA ≡ B'^C'A', com (5) B^CA ≡ B'^C'X e com o postulado do transporte de ângulos, decorre que B'A' e C'X = C'A' interceptam-se num único ponto X = A'.

De X ≡ A', com (4), decorre que B'A' ≡ BA.

Então:

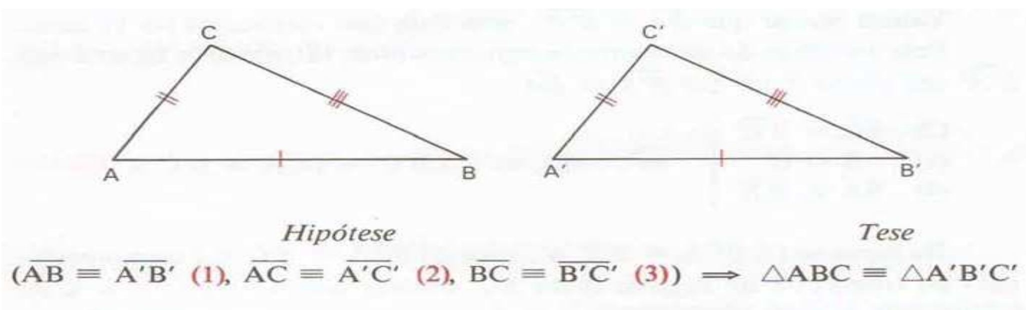
(BA ≡ B'A', ^B ≡ ^B', BC ≡ B'C')

→ΔABC ≡ ΔA'B'C'

→Com base no 2º caso (ALA), pode-se provar a reciproca do teorema do triângulo isósceles: "Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles."

IV.9- 3º caso - LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.



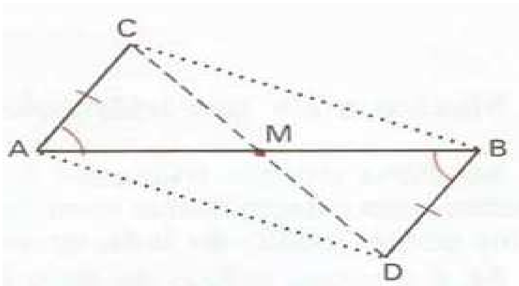
IV.10- Existência do ponto médio

Dado um segmento de reta AB, usando os postulados de transporte de ângulos e de segmentos construímos:

CÂB ≡ D^BA → AC ≡ DB

com C e D em semiplanos opostos em relação a reta AB.

O segmento CD intercepta o segmento AB num ponto M. Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:



ΔCAB ≡ ΔDBA (LAL, AB é comum)

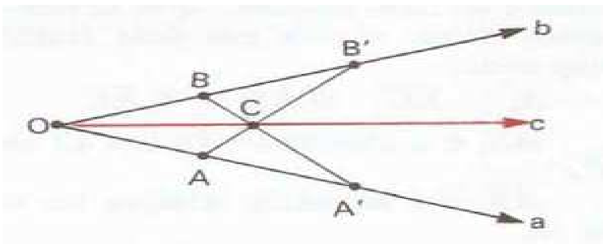
ΔCAD ≡ ΔDBC (ALA, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)

ΔAMD ≡ ΔBMC (ALA)

Desta ultima congruência decorre que AM ≡ BM, ou seja, M é o ponto médio de AB.

IV.11- Existência da bissetriz

Dado um ângulo aÔb, usando o postulado do transporte de segmentos obtemos A e A' em Oa e B e B' em Ob tais que:



OA ≡ OB (1) OA' ≡ OB' (2)

com OA' > OA e OB' > OB.

Seja C o ponto de interseção de AB' com A'B e consideremos a semi-reta OC = Oc.

Vejamos uma sequência de congruências de triângulos da fig. anterior:

ΔAOB' ≡ ΔBOA' (LAL, aÔb (comum)

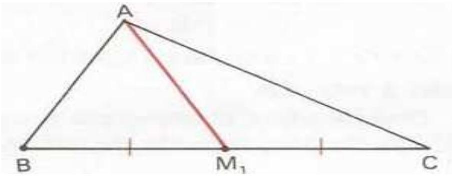
ΔACA' ≡ ΔBCB' (ALA, ângulos adjacentes suplementares, diferença de segmentos)

ΔOAC ≡ ΔOBC (LAL)

Desta ultima congruência decorre que AÔC ≡ BÔC, ou seja, Oc é bissetriz de aÔb.

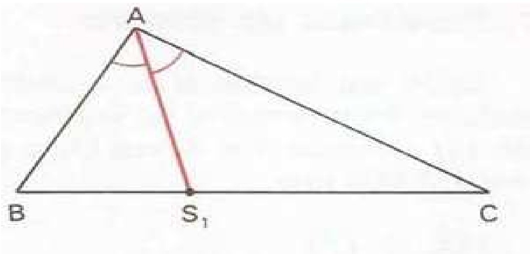
IV.12- Mediana de um triângulo – definição

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto. M1 é o ponto médio do lado BC. AM1 é a mediana relativa ao lado BC. AM1 é a mediana relativa ao vértice A.



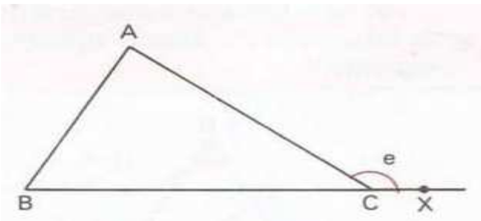
IV.13- Bissetriz interna de um triângulo – definição

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.



IV.14- Teorema do ângulo externo

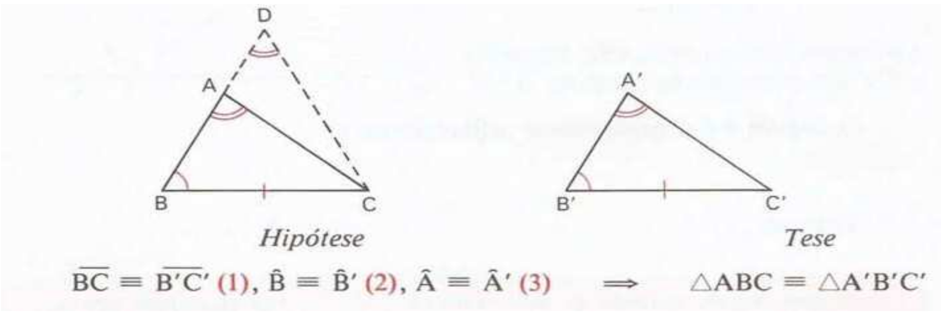
Dado um ΔABC e sendo CX a semi-reta oposta a semi-reta CB, o ângulo ê = A^CX
é o angulo externo do ΔABC adjacente a ^C e não adjacente aos ângulos Â e ^B.
O ângulo ê é o suplementar adjacente de ^C.



Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

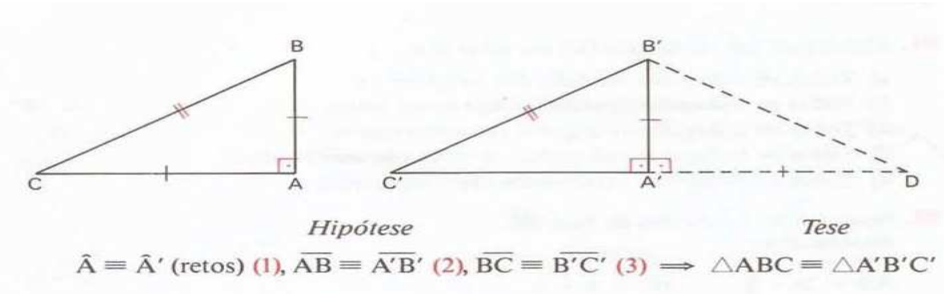
IV.15- 4º caso de congruência – LAAo

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.



IV.16- Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.



EXERCÍCIOS:

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo triângulo isósceles é equilátero.

b) Todo triângulo equilátero é isósceles.

c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.

d) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

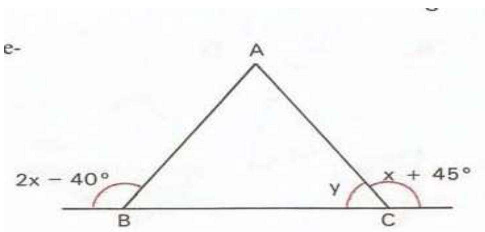
e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.

f) Existe triângulo retângulo e isósceles.

g) Existe triângulo isósceles obtusângulo.

h) Todo triangulo acutângulo ou é isósceles ou é equilátero.

2. Se o ΔABC é isósceles de base BC, determine x e y.



2. Se o perímetro de um triângulo equilátero mede 75cm., quanto mede cada lado?

3. Determine o perímetro do triângulo ABC nos casos:

a) Triângulo equilátero com AB = x + 2y, AC = 2x – y e BC = x + y + 3.

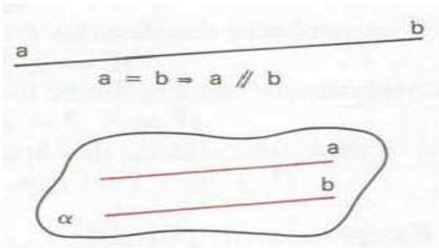
b) Triângulo isósceles de base BC com AB = 2x + 3, AC = 3x - 3 e BC = x + 3.

CAPÍTULO V- PARALELISMO

Conceitos e propriedades

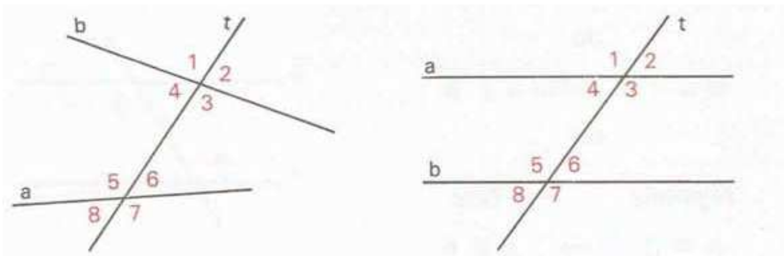
V.1- Retas paralelas

Duas retas são paralelas (símbolo: //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não tem nenhum ponto comum.



Sejam a e b duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b:

1) t é uma transversal de a e b;



2) dos oito ângulos determinados por essas retas indicados nas figuras acima, chamam-se ângulos

Alternos: 1 e 7, 2 e 8, 3 e 5, 4 e 6

Correspondentes: 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8

Colaterais: 1 e 8, 2 e 7, 3 e 6, 4 e 5

NOTAS:

1ª- Com mais detalhes podemos ter:

Alternos: alternos internos: 3 e 5, 4 e 6

alternos externos: 1 e 7,2 e 8

Colaterais colaterais internos: 3 e 6, 4 e 5

colaterais externos: 1 e 8, 2 e 7

2ª- A congruência de dois ângulos alternos de um dos pares (por exemplo, 1 ≡ 7) equivale

a) à congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos alternos

(2 ≡ 8, 3 ≡ 5, 4 ≡ 6);

b) à congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos correspondentes

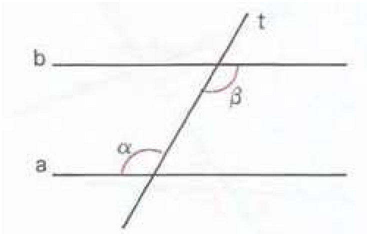
(1 ≡ 5, 2 ≡ 6, 3 ≡ 7,.4 ≡ 8); e

c) à suplementaridade dos ângulos de todos os pares de colaterais

(1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 180°).

V.2- Existência da paralela

Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.



Se α = β, então a // b.

V.3- Unicidade da paralela - postulado de Euclides

A unicidade da reta paralela a uma reta dada é o postulado de Euclides (300 a.c.) ou postulado das paralelas que caracteriza a Geometria que desenvolvemos: a Geometria Euclidiana.

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

V.4- Condição necessária e suficiente

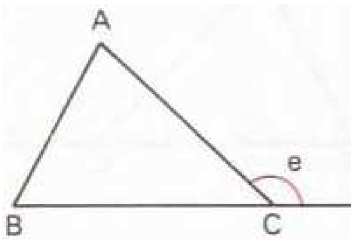
α ≡ β → a // b e a // b → α ≡ β

Temos o enunciado que segue:

Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal, ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.

V.5- Ângulo externo

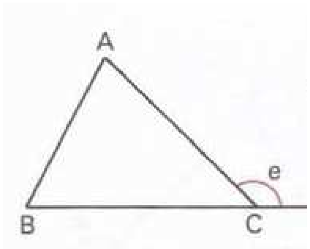
Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



ê é ângulo adjacente a ^C → ê = Â+^B

V.6- Soma dos ângulos de um triângulo

A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.



Considerando as medidas dos ângulos, temos:

m(Â) + m(^B) + m(^C) = 180°

que representaremos simplesmente por:

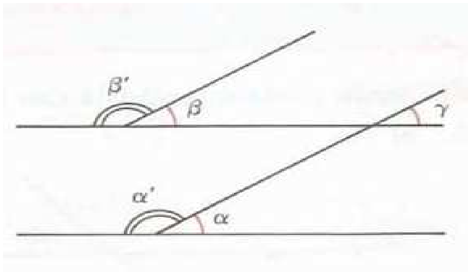
Â + ^B + ^C = 180°

NOTAS:

1ª- Ângulos de lados paralelos

Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.

Demonstração:



Consideremos os ângulos de medidas α e α' adjacentes suplementares e

β e β' adjacentes suplementares (vide figura).

Pelo paralelismo, considerando o ângulo auxiliar γ, temos:

α = γ β = γ → α = β

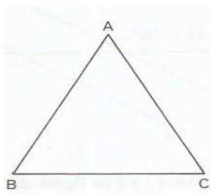
Daí, vem: α' = β'

α + β' = 180° α' + β = 180

2ª- Triângulo Equilátero

Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60°.

Demonstração:



Seja ABC o triângulo equilátero:

AB = AC = BC

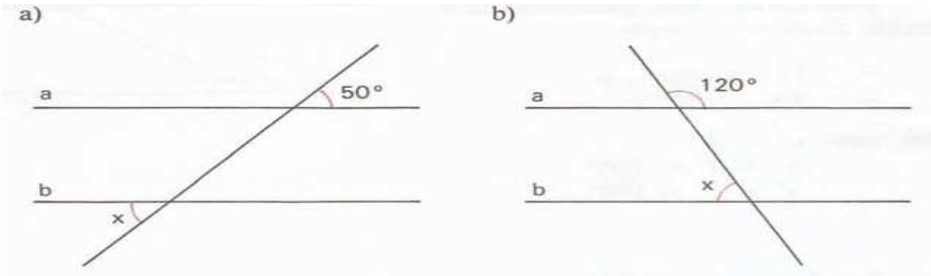
Usando o teorema do triângulo isósceles, temos:

CA = CB → Â = ^B

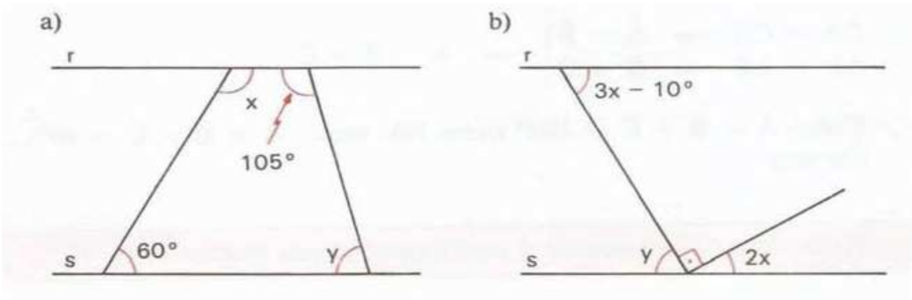
AB = AC → ^B =^ C → Â = ^B = ^C.

EXERCÍCIOS:

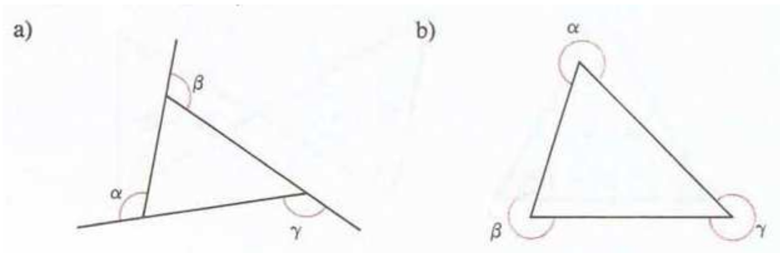
1. Sendo a reta a paralela à reta b, determine x nos casos:



2. As retas r e s da figura são paralelas. Determine x e y.



3. Determine α+β+γ nos casos:



CAPÍTULO VI- PERPENDICULARIDADE

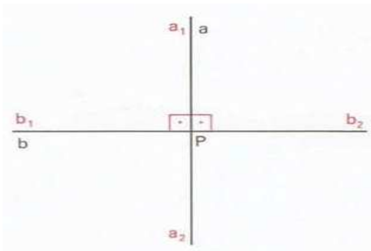
Definições – ângulo reto

Em geometria, **perpendicularidade** (ou **ortogonalidade**) é uma noção que indica se dois objetos (retas ou planos) fazem um ângulo de 90º.

VI.1- Retas perpendiculares

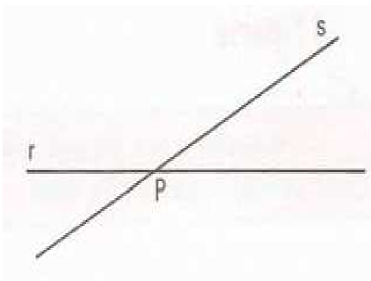
Duas retas são perpendiculares (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes em que a1 é uma das semi-retas de a de origem P e b1, e b2 são semi-retas opostas de b com origem em P.

Duas semi-retas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto comum.



VI.2-Retas oblíquas

Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que essas retas são oblíquas.



Existência e unicidade da perpendicular

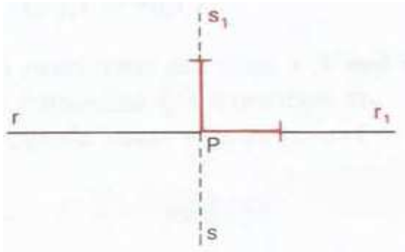
1ª Parte

Num plano por um ponto dado de uma reta dada passa uma única reta perpendicular a reta dada. Ou,

Num plano, por um ponto P de uma reta r existe uma única retas perpendicularar.

VI.3- Existência

Utilizando o postulado do transporte de ângulos e sendo r1 uma das semi-retas de r de origem P, construímos, num dos semiplanos dos determinados por r, o ângulo s1^pr1 congruente a um ângulo reto.



VI.4- Unicidade

Se duas retas distintas x e Y, com x ≠ Y, passando por P fossem ambas perpendiculares a r, teríamos:

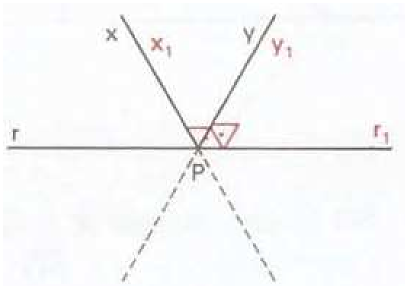
Com as semi-retas Px1 de x e Py1 de Y situadas num mesmo semiplano dos determinados por r e com Pr1 semi-reta de r, vem:

x ⊥ r em P → r1P^x1 é congruente ao ângulo reto.

Y ⊥ r em P → r1P^y1 é congruente ao ângulo reto.

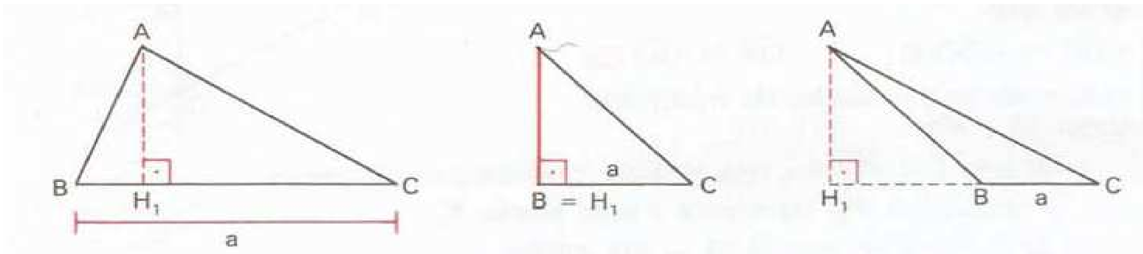
Se Px1 é distinta de Py1, o resultado acima é um absurdo, de acordo com o postulado do transporte de ângulos.

Logo a reta perpendicular a r por P é única.



VI.5- Altura de um triângulo

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.

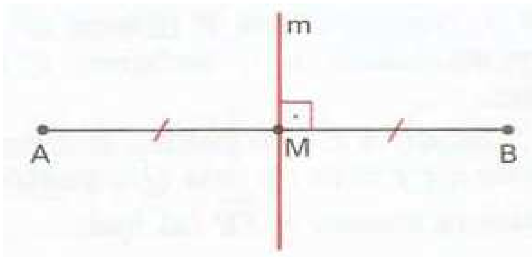


H1 é a interseção da reta BC com a perpendicular a ela, conduzida por A.

AH1 é a altura relativa ao lado BC, ou AH1 é a altura relativa ao lado a, ou ainda AH1 é a altura relativa ao vértice A. H1 também é dito pé da altura.

VI.6- Mediatriz de um segmento

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.



Projeções e distância

VI.7- Projeção de um ponto sobre uma reta

Chama-se projeção ortogonal (ou simplesmente projeção) de um ponto sobre uma reta ao ponto de interseção da reta com a perpendicular a ela conduzida por aquele ponto.

P' é a projeção de P sobre r. $PP' \perp r$ e $PP' \cap r = p'$

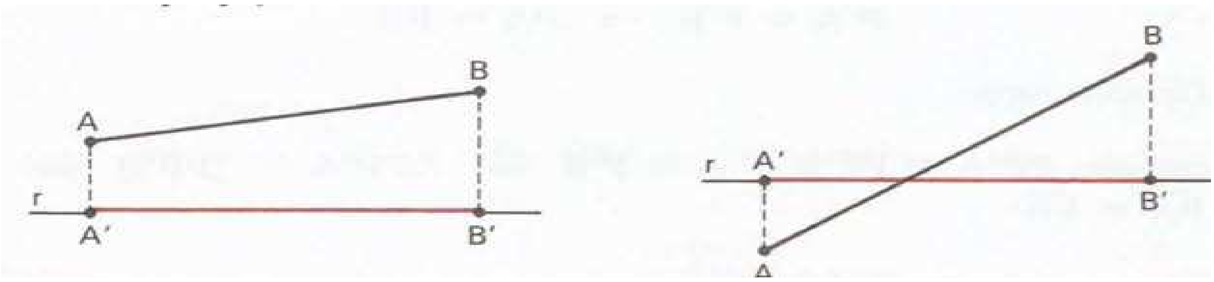
P' e o pé da perpendicular à reta r conduzida por P.

Se P □ r, então P' = P.

VI.8- Projeção de um segmento sobre uma reta

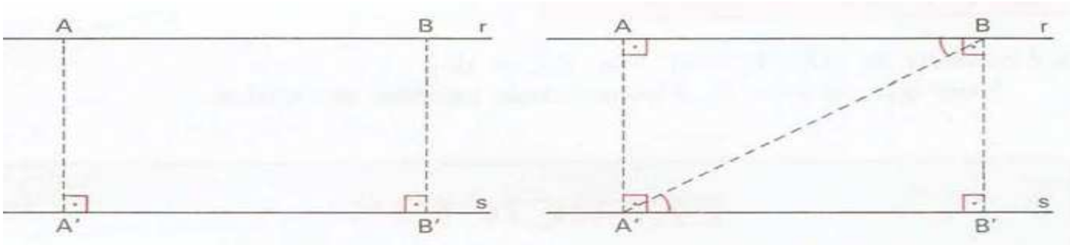
A projeção de um segmento de reta AB não perpendicular a uma reta r sobre esta reta e o segmento de reta A'B' em que

A' é a projeção de A sobre r e B' e a projeçao de B sobre r.



VI.9- Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma delas estão a igual distância (são equidistantes) da outra.

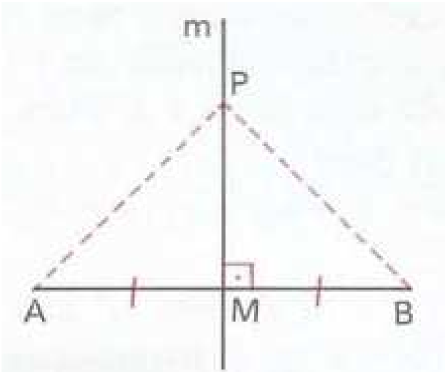
De fato, sendo r e s duas retas paralelas e distintas, tomando dois pontos distintos A e B em r, vamos provar que d as = d bs



VI.10- Propriedade dos pontos da mediatriz

Usando o caso LAL de congruência de triângulos, podemos provar que:

Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.

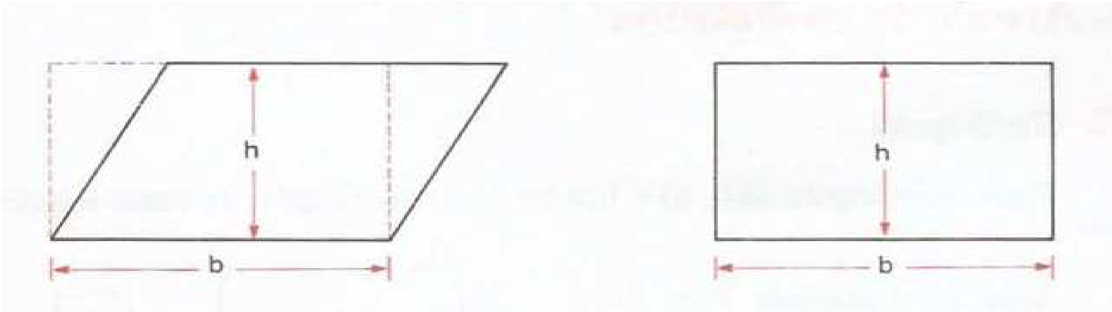


CAPÍTULO VII- ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

Áreas de polígonos

VII.1- Paralelogramo

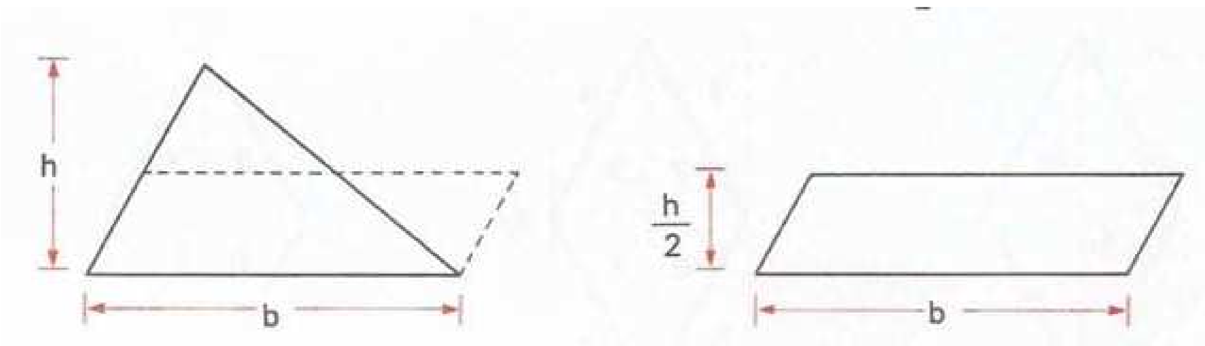
Dado o paralelogramo P(b, h), ele é equivalente a um retângulo cuja base mede b e altura mede h. Logo:



Ap = Ar → Ap = b*h

VII.2- Triângulo

Dado o triângulo T(b, h), ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede h/2. Logo:



At = b * h/2

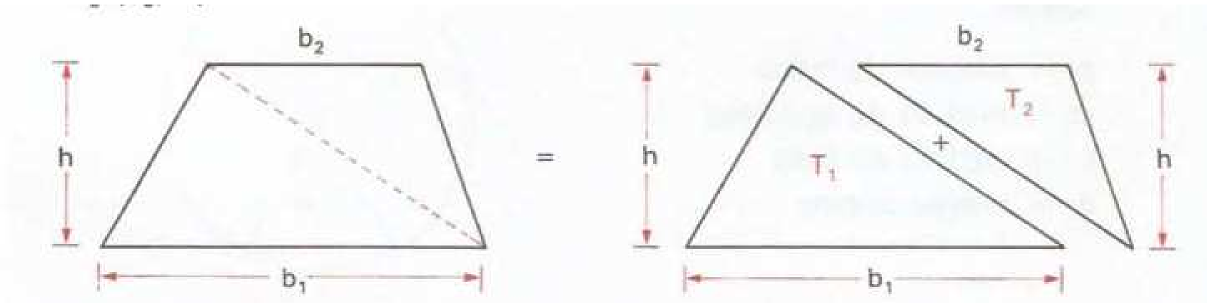
NOTA:

Área do triângulo equilátero de lado a. Um triângulo equilátero de lado a tem altura h = a√3/2 e sua área S é então:

S = 1/2*a*a√3/2 → S = a*a√3/4

VII.3- Trapézio

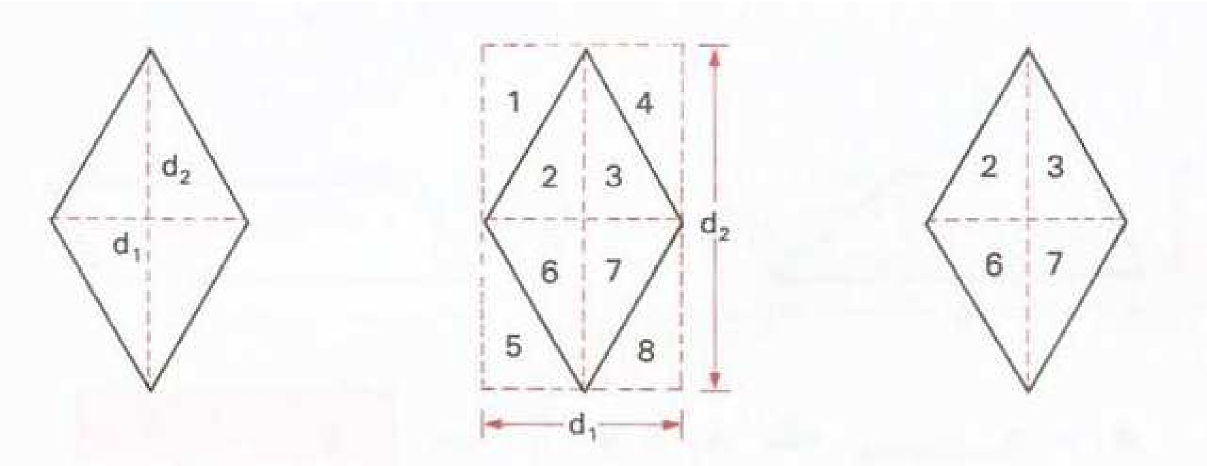
Dado o trapézio Tra (b1, b2, h), ele é a soma de dois triângulos T1 (b, h) e T2 (b2, h).



At = b1*h/2 + b2*h/2 → At = (b1+b2)*h/2

VII.4- Losango

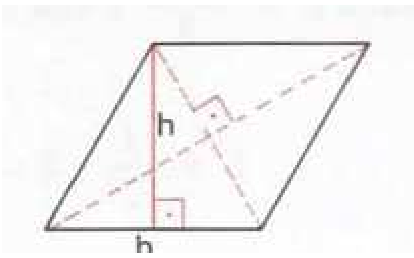
Dado o losango L(d1,d2), conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas as diagonais.



Al = d1*d2/2

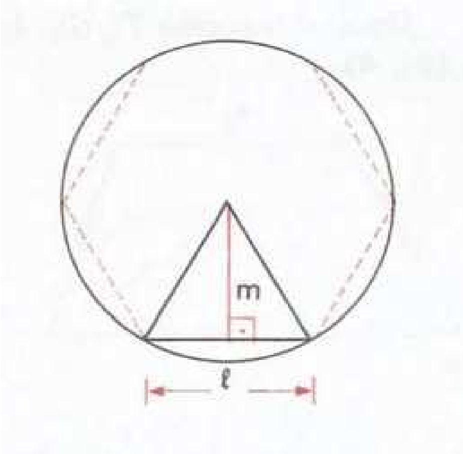
NOTA:

O losango é paralelogramo e portanto sua área também é dada por: Al = b*h



VII.5- Polígono regular

Sendo: **n** = numero de lados; **m** medida do apótema; **l** medida do lado; e **p** semiperímetro.



Seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a l e de apótema de medida m.

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura m. Então:

Apol = n*At

At = l*m/2 → Apol = n*l*m/2

Sendo n*l = 2p (perímetro), vem:

Apol = 2*p*m/2 → Apol = p*m

Nota

Área de um hexágono regular de lado a.

Um hexágono regular de lado a é a reunião de 6 triângulos equiláteros de lado a.

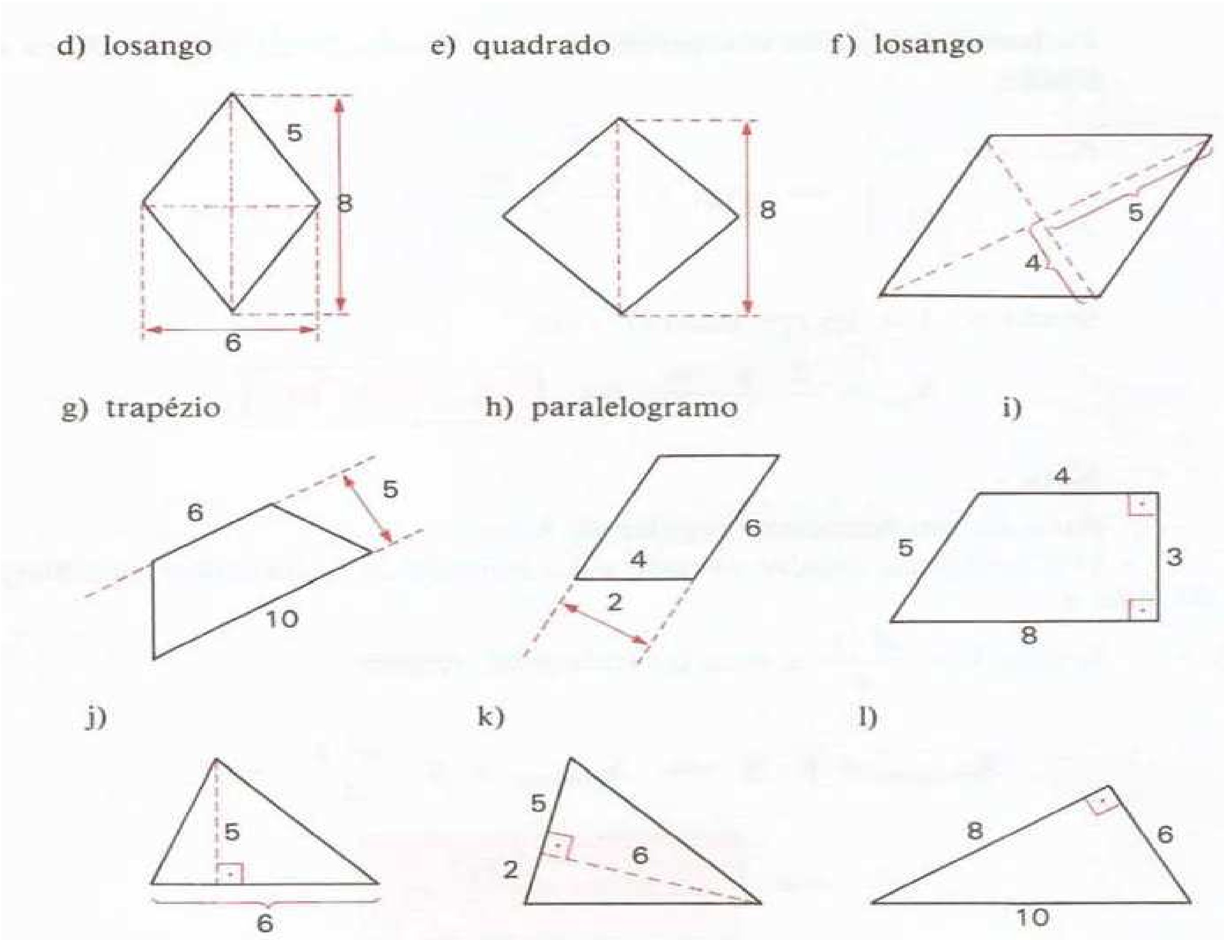
Sendo S = a*a√3/4 a área do triângulo temos:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot S \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

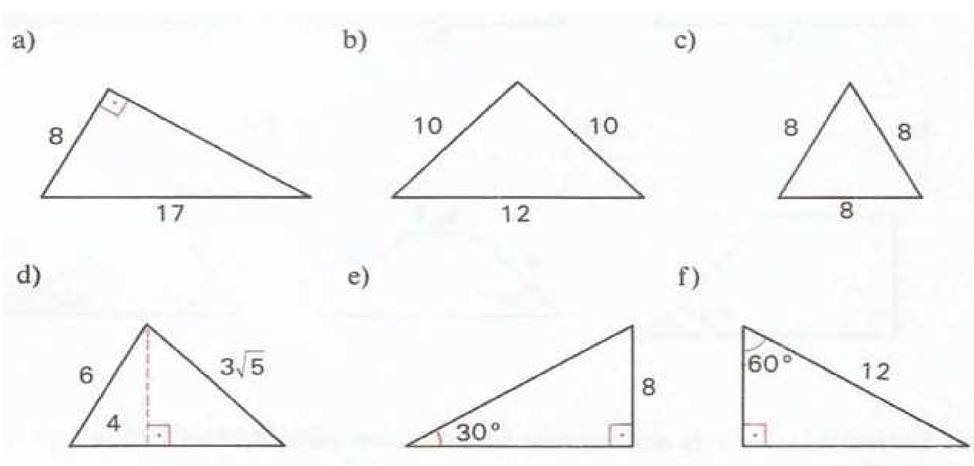
$$\Rightarrow \boxed{A_{\text{hexágono}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$$

EXERCÍCIOS:

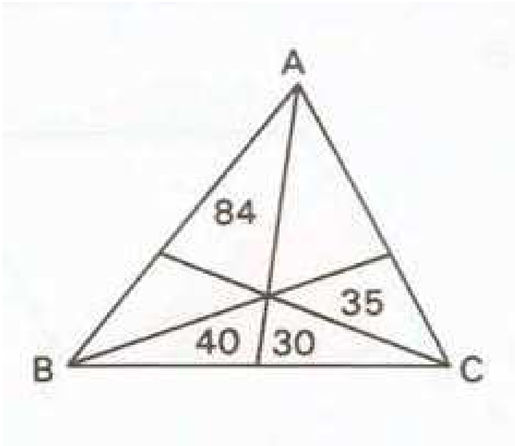
1. Determine a área dos polígonos nos casos abaixo, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.



2. Determine a área do triangulo nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas.



C) Como mostra o desenho, o triângulo ABC está dividido em seis triângulos. O número indicado no interior de quatro deles expressa a sua área. Determine a área do triangulo ABC.



VII.6- Área do círculo

A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

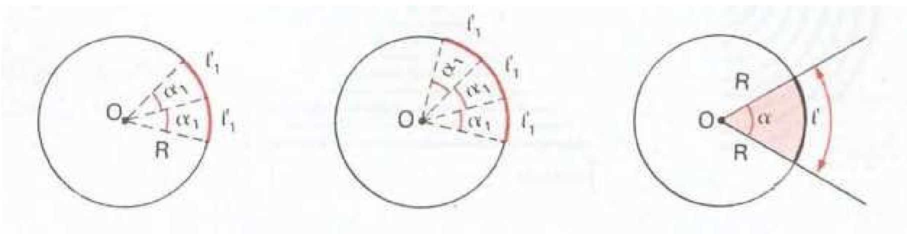
$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

$$\boxed{A_C = \pi \cdot R^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{A_C = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

VII.7- Área do setor circular

Notemos que, quando dobramos o arco (ou angulo central), dobra a área do setor; triplicando-se o arco (ou ângulo central), a área do setor também é triplicada, e assim por diante. De modo geral, a área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou a medida do ângulo central). Portanto, a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples:



a) Área de um setor circular de raio R e α radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} — A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

b) Área de um setor circular de raio R e α graus

$$\left.\begin{array}{l} 360° — \pi R^2 \\ \alpha° — A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

c) Área de um setor circular em função de R e do comprimento ℓ do arco

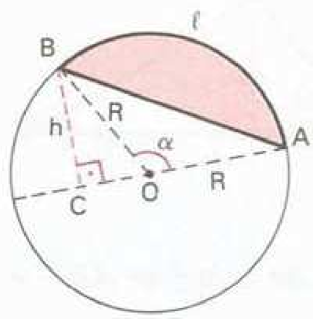
$$\left.\begin{array}{l} 2\pi R — \pi R^2 \\ \ell — A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\ell R}{2}}$$

VII.8- Área do segmento circular

Cálculo da área do segmento circular indicado na figura: R é o raio α é a medida do ângulo central e l é o comprimento do arco.

$$A_{segm} = A_{set\,OAB} - A_{\Delta OAB}$$

a) Usando o h (que pode ser obtido no ΔOBC)



$$A_{segm} = \frac{\ell R}{2} - \frac{Rh}{2} \Rightarrow$$

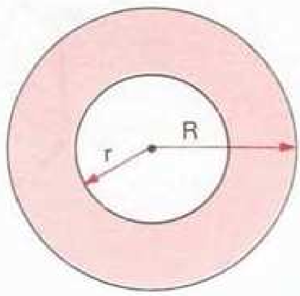
$$\Rightarrow \boxed{A_{segm} = (\ell - h)\frac{R}{2}}$$

b) Usando α em radianos

$$A_{segm} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R \cdot R \text{ sen } \alpha \quad \boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha)}$$

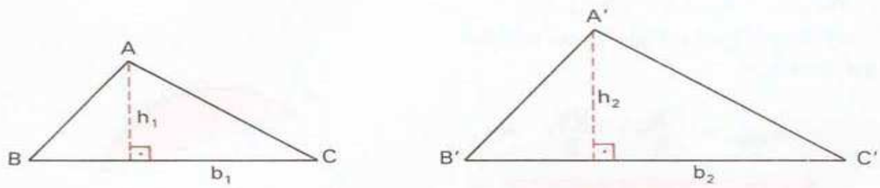
VII.9- Área da coroa circular

$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \implies \boxed{A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)}$$



Razão entre áreas

VII.10- Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes.



Área do triângulo $ABC = S_1$ Área do triângulo $A'B'C' = S_2$

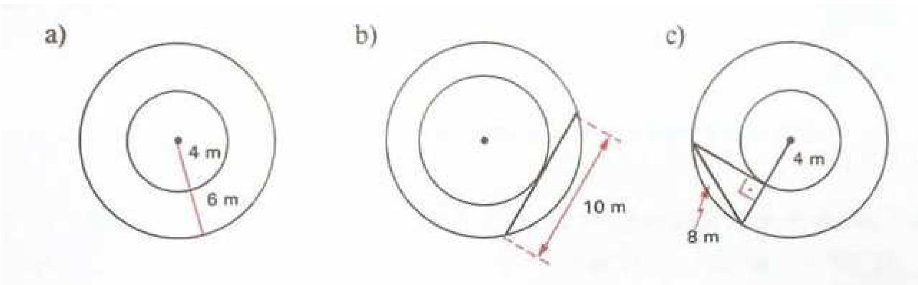
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \quad \text{(razão de semelhança)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\,b_1h_1}{\frac{1}{2}\,b_2h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \implies \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

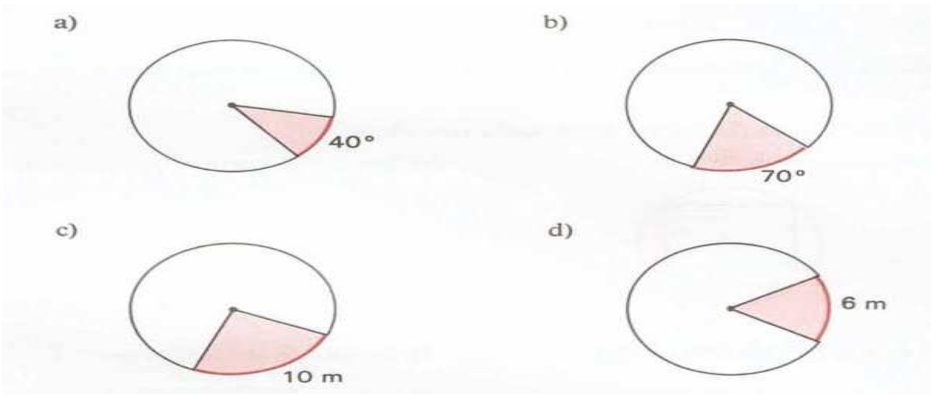
Conclusão: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

EXERCÍCIOS:

1. Determine a área da coroa circular nos casos:

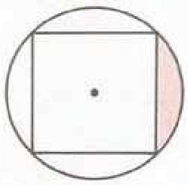


2. Determine a área de cada setor circular sombreado nos casos abaixo, sendo 6m o raio.

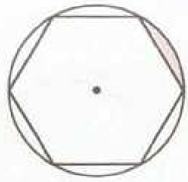


3. Determine a área da região sombreada nos casos:

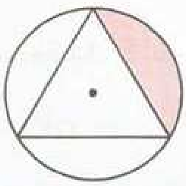
a) quadrado de lado *8 m*



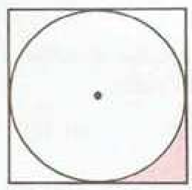
b) hexágono regular de lado *6 m*



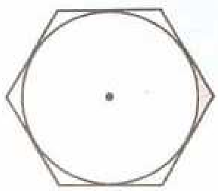
c) triângulo equilátero de lado *12 m*



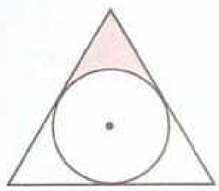
d) quadrado de lado *8 m*



e) hexágono regular de lado *12 m*

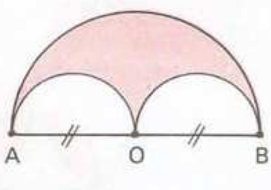


f) triângulo equilátero de *6 m* de lado



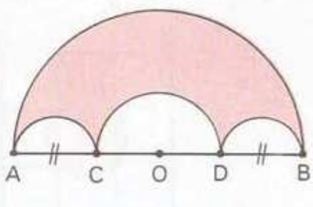
4. Nas figuras abaixo, determine a área hachurada, sendo AB igual a 20 cm.

a)



$\overline{AO} \equiv \overline{OB}$

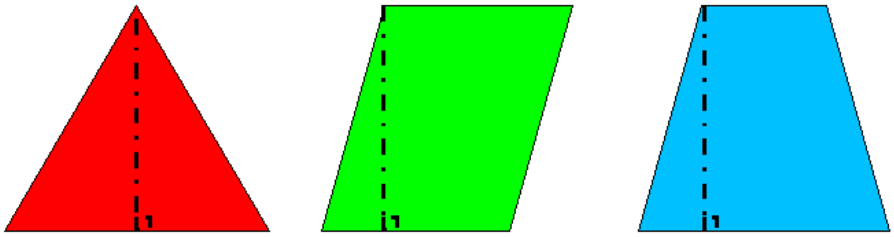
b)



$\overline{AC} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{DB}$

GLOSSÁRIO

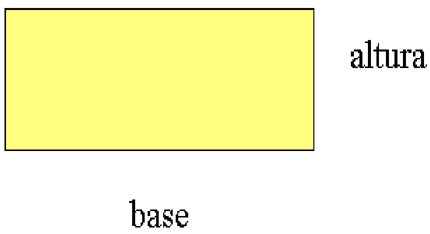
Em alguns triângulos, paralelogramos ou trapézios, altura é um segmento de reta desenhado a partir de um vértice, perpendicularmente ao lado oposto a ele. Esse lado oposto chama-se base.



Altura: nome dado a alguns comprimentos

Base: no retângulo base é o lado que não é considerado altura.

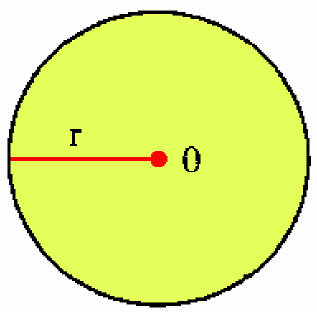
.



Num triângulo ou paralelogramo base é o lado perpendicular à altura.

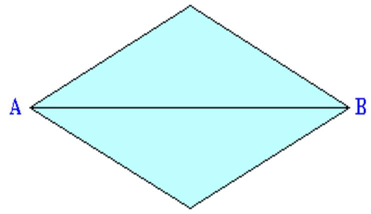
Centro: ponto no interior de uma circunferência ou esfera, eqüidistante de todos os pontos dela.

Círculo: porção de um plano limitada por uma circunferência.



Circunferência: curva plana, fechada, cujos pontos estão todos a mesma distância de um ponto interior, dito Centro.

Diagonal: segmento de reta que liga dois vértices de um polígono, os vértices não podem ser vizinhos.



O segmento AB é uma diagonal do losango.

Equilátero: o prefixo "equi" indica igualdade, um polígono é equilátero se todos os lados forem iguais.

Geométria: palavra de origem Grega formada por Geo (terra) e metria (medida). Há 5000 anos, era a ciência de medir terrenos, seus perímetros e suas áreas. Com o tempo, tornou-se a parte da matemática que estuda figuras como retângulos, cubos, esferas, etc.

Perímetro: medida do contorno de uma figura geométrica plana (ou seja, soma de todos os lados).

Raio: segmento de reta que vai do centro a um ponto qualquer da circunferência.

Vértice: ponto comum a dois lados de um ângulo, a dois lados de um polígono ou a três ou mais arestas de uma figura espacial.

REFERÊNCIAS

Dante, Luiz Roberto, Matemática; Contexto e Aplicações; Editora Ática S.A; Volume Único; 3º Edição; Brasil; 2008.

Dolce, Osvaldo; Iezzi, Gelson; Machado, Antonio; Geometria Plana: Conceitos Básicos**;** Editora: Saraiva – Didáticos; Volume Único; 1º Edição; Brasil; 2009.

Dolce, Osvaldo, Pompeo, José Nicolau; Fudamentos de Matemática Elementar – Geometria Plana; Atual Editora, 7º Edição, Brasil, 2005.

Responsáveis:
Profa. Dra. Patrícia dos Santos Matta
Prof. Dr. Carlos Alberto Martins Ferreira